UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
MATEMÁTICA

Leonardo Garcia dos Santos

O PROBLEMA DE MONTY-HALL: UMA ABORDAGEM INTRODUTÓRIA PARA O ESTUDO DA PROBABILIDADE CONDICIONAL

Florianópolis

2015

Leonardo Garcia dos Santos

O PROBLEMA DE MONTY-HALL: UMA ABORDAGEM INTRODUTÓRIA PARA O ESTUDO DA PROBABILIDADE CONDICIONAL

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

dos Santos, Leonardo Garcia
O problema de Monty Hall : Uma aboradagem introdutória para o estudo da Probabilidade Condicional / Leonardo Garcia dos Santos ; orientador, Gilles Gonçalves de Castro - Florianópolis, SC, 2015.
50 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. Probabilidade Condicional. 3. Simulação de Monte Carlo. 4. Lei dos Grandes Números. 5. Ensino. I. Gonçalves de Castro, Gilles. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Leonardo Garcia dos Santos

O PROBLEMA DE MONTY-HALL: UMA ABORDAGEM INTRODUTÓRIA PARA O ESTUDO DA PROBABILIDADE CONDICIONAL

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

Florianópolis, 26 de junho 2015.

Prof. Maria Inez Cardozo Gonçalves, PhD.
Coordenador(a) em Exercício
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Orientador - Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dra. Andréa Cristina Konrath
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Luciano Bedin
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado à minha querida família. Em especial, para minha amada esposa Tiffany e meu lindo filho Anthony, pelo apoio incondicional.

AGRADECIMENTOS

A primeira pessoa que devo agradecer é minha esposa Tiffany que me apoia em todos os momentos, até mesmo nos quais eu mesmo já não acredito. Além disso, agradeço a meus pais por todas as preces realizadas a meu favor nos dias de provas. A meu orientador e professor Gilles Gonçalves de Castro, pelos conhecimentos transmitidos e principalmente pela a ajuda na definição do tema deste trabalho. A meus amigos Thiago, André e Luiz, pela companhia nestes anos de estudos matemáticos. Enfim, a todos que de uma forma ou de outra colaboraram com a realização deste trabalho, sobretudo à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro ao longo do curso.

Penso noventa e nove vezes e nada descubro; deixo de pensar, mergulho em profundo silêncio - e eis que a verdade se me revela.

Albert Einstein

RESUMO

Um dos principais problemas no ensino da Matemática no Ensino Médio é a falta união da teoria com a comprovação dos resultados. Em particular, o ensino da Teoria da Probabilidade, muitas vezes acaba sendo abolido do ano letivo dos alunos por este motivo. Neste sentido, necesita-se buscar uma problemática que consiga promover o interesse e a validação prática dos resultados. Seguindo esta proposta, mostramos o programa de auditório *Let's make a deal* exibido na década de 70 nos Estados Unidos, o apresentador Monty Hall, exibia três portas para os concorrentes, uma delas com um carro por detrás, e outras duas onde se encontravam bodes. O concorrente escolhia uma porta, e em seguida Monty Hall desvendava uma porta onde se encontrara um bode. Logo depois, Monty sugeria ao participante a oportunidade de manter-se com a mesma porta ou trocar para a outra porta fechada. O concorrente deveria mudar? Para desvendar o Problema de Monty Hall e utilizá-lo como estímulo no Ensino da Teoria das Probabilidades no Ensino Médio, foi desenvolvido neste trabalho a solução deste problema utilizando conceitos probabilísticos, principalmente os de Probabilidade Condicional e Teorema de Bayes, bem como a criação de um Modelo no Software Excel baseado nas Simulações de Monte Carlo para comprovação experimental dos resultados (união da teoria com a prática).

Palavras-chave: Problema de Monty-Hall. Probabilidade Condicional. Ensino.

ABSTRACT

One of the main problems in teaching Mathematics in High School is the lack of union between theory and result validation. In particular, the teaching of Probability Theory, ends up being abolished from the school year. For this reason we need to search a problem that promotes the interests the practical validation results. Following this proposition we presents the TV show *Let´s make a deal* aired in the 1970s in the United States, the host Monty-Hall, showed three doors to the competitors, one of them with a car behind, and another two with goats behind. The competitor chose one of the doors, and after that, Monty-Hall revealed one door where there was a goat. A few moments later, Monty offered the competitor the chance to keep the same door or to change to the another closed one. Should the competitor should change his door? To study Monty-Hall's problem and use it as a stimulus in the education of Probability Theory in High School, it will be developed in this text the solution of this problem using probabilistic concepts, mainly that of Conditional Probability and Bayes' Theorem, as well as it will be shown a Model in Excel Software based on the Monte Carlo's Simulation as an experimental evidence of the results (union of theory with practice).

Keywords: Monty-Hall's Problem. Conditional Probability. Education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sabe-se que a Teoria das Probabilidades teve início na tentativa de compreensão das chances existentes nos jogos de azar, e a partir daí os matemáticos contribuíram para o seu desenvolvimento. A partir disso, sabemos que o modelo probabilístico que se utiliza depende de processos aleatórios, e assim, causa polêmica em quem ainda está se familiarizando com o assunto. Você pode dizer a um aluno, que no lançamento de uma moeda tem-se 50% de chances de obter cara e 50% de chances de obter coroa. Contudo, se este aluno fizer um experimento com 10 jogadas, temos a chance de por ventura não comprovar a teoria anterior. Weschsler (1993) cita que para um modelo frequentista, a ideia de probabilidades fixas, porém desconhecidas, direciona à suposição de existência de parâmetros.

Ainda mais, trabalhar com uma matéria que necessita reflexão e ligações com a prática torna-se confuso no momento em que a trabalhamos de forma imutável. Visto isto, é justo afirmar que as probabilidades devem ser revistas à medida que as informações são alteradas ou chegam novas informações (SILVER, 2013).

Seguindo este contexto, vem o Problema de Monty Hall, que nos traz a possibilidade de trabalhar conceitos de probabilidade a partir de um problema instigador, cheio de nuances e que permite desenvolver vários conceitos da Teoria da Probabilidade. Para entendê-lo melhor, seu sistema de funcionamento partia de um jogo de auditório onde haviam três portas, uma com um carro como prêmio e outras duas com bodes como decepção. O participante escolhe uma das portas aleatoriamente, e logo a seguir o apresentador abre uma das portas (sempre desvendando um bode) questionando se o participante gostaria de trocar de porta. Você mudaria de porta? Qual é a probabilidade de ganhar trocando de porta ou não? Os supersticiosos dizem que nunca deve-se trocar a primeira opção, pois é seu destino ganhar ou não. E agora?

Baseado nesta dúvida, o presente trabalho busca instigar a aprendizagem da Teoria das Probabilidades inserindo uma abordagem para a solução deste problema introdutório. Inicialmente, apoiando-se no enfoque da Definição de Probabilidade e do Teorema de Bayes e num outro momento, utilizando uma ferramenta computacional para a comprovação dos resultados na prática, experimentos estes que são muito importantes para agregar aos conceitos dos alunos que estudam a Teoria das Probabilidades.

Será exposto no trabalho três sessões principais. Na primeira delas, colocar-se-á um histórico de como o Problema de Monty Hall se tornou tão famoso. A segunda trará a fundamentação teórica da Teoria das Probabilidades para obter-se a solução o Problema baseado na definição de probabilidade e no Teorema de Bayes. Na terceira, apresentaremos o processo de simulação de Monte Carlo, para embasamento teórico das simulações utilizando um modelo com o Software Excel para apreciação e discussão dos resultados.

Ao leitor informa-se que o texto que segue é bastante acessível e que necessita conhecimento em matemática básica e noções de Teoria dos Conjuntos. É interessante também que seja feita a verificação dos cálculos ao longo do texto para uma melhor compreensão dos coneitos e técnicas empregadas.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma ferramenta de auxílio e incentivo ao estudo da Probabilidade Condicional no Ensino Médio.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar o problema de Monty-Hall.
- Apresentar a fundamentação da Teoria da Probabilidade a partir da solução da problemática do caso.
- Discutir os resultados práticos por meio de simulações.

2 O PROBLEMA DE MONTY HALL

2.1 ENTENDENDO O PROBLEMA

Entre 1963 e 1976, nos Estados Unidos, fora transmitido o programa “Let´s make a deal”, que em português significa “Vamos fazer um negócio?”. O âncora do programa, Monty Hall, em um dado momento do programa, chama um participante e lhe oferece três portas: uma com um grande prêmio (geralmente um carro) e outras duas com bodes por detrás. Logo após o candidato escolher sua porta, Monty Hall, oportunamente lhe revela uma das portas a qual não está o grande prêmio e questiona: Você deseja permanecer com sua porta, ou trocá-la? ”Para a surpresa dos idealizadores, mesmo após a transmissão de 4500 episódios ao longo de muitos anos, esta questão sobre probabilidade acabou sendo seu principal legado”. (MLODINOW, 2011, p.62).

Figura 1 – Monty Hall em seu programa “Let ’s make a deal”.

FONTE: http://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/2012/10/08/quien-es-monty-hall-un-dos-tres-responda-otra-vez/

Em uma entrevista a um programa matinal dos Estados Unidos, Monty Hall declarou que sempre tinha conhecimento sobre onde o prêmio principal se encontrava e que obviamente utilizava armadilhas psicológicas para que o candidato trocasse de porta (ou não) para que não o ganhasse. Obviamente, pensando em probabilidades não se nota a participação do apresentador. Neste sentido, assim como segundo Mlodinow (2011), o problema de Monty Hall é difícil de entender, pois não é facilmente percebida a participação do apresentador. “Um probleminha maravilhosamente confuso [...] em nenhum outro ramo da matemática é tão fácil para um especialista cometer erros como na teoria da probabilidade.”(GARDNER, apud, MLODINOW, 2011, p.77)

Figura 2 – Representação do programa de Monty Hall.

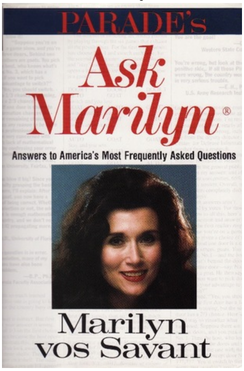
FONTE: http://blogdoechevarria.blogspot.com.br/2008/04/o-problema-de-monty-hall.html

2.2 QUANDO O PROBLEMA SE NOTABILIZOU

Já existiam publicações a respeito do problema de Monty Hall, porém não foi antes de Setembro de 1990 que o problema realmente se tornou popular. Marylin Vos Savant foi conhecida entre 1986 e 1989 como sendo a pessoa que possuía o maior QI em todo o mundo, de acordo com o Guiness Book of Worls Records. Ela escrevia em uma coluna para a revista Parede Magazine chamada Ask Marylin que na tradução significa ”Pergunte a Marylin”na qual resolvia desafios e perguntas de seus leitores.

Em setembro de 1990, na sua coluna o problema de Monty Hall se tornou a corrente principal, onde ao responder sobre o problema disse que a chance de ganhar o prêmio ao trocar de porta aumentaria para aproximadamente 66%. Esta sua resposta gerou um debate nacional sobre o problema. Vários matemáticos experientes da época entraram em contato com Marylin argumentando contra a opinião dela, o que gerou uma segunda coluna sobre o assunto que fora tão impactante que virou capa do The New York Times do mesmo mês. Na coluna citada ela procurou professores de Escolas de Ensino Médio e fez com que eles apresentassem o problema para seus alunos e em praticamente 100% dos experimentos foram comprovadas suas constatações.

Figura 3 – Marilyn vos Savant.



FONTE: www.openlibrary.org/books/OL1721824M/AskMarilyn

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

3.1 INTRODUÇÃO A TEORIA DA PROBABILIDADE

3.1.1 Espaço Amostral e Eventos

O estudo da probabilidade vem da necessidade de em certas situações, prevermos a possibilidade de ocorrência de determinados fatos. “No decorrer do tempo a teoria das probabilidades foi superando o marco original da teoria dos jogos para constituir na atualidade um ramo da matemática pura com aplicações nas ciências de um modo geral”(MORGADO, CARVALHO, FERNANDEZ, 2006, p. 212).

Faremos aqui uma breve revisão dos aspectos fundamentais da evolução do conceito de probabilidade.

Definição 3.1. *O ESPAÇO AMOSTRAL é um conjunto, e por simplicidade vamos assumir este conjunto como finito. Geralmente representaremos esse conjunto por S ou por Ω.*

Exemplo 3.2. *Considere um experimento no qual classificamos um produto em defeituoso ou não defeituoso. Neste caso, o espaço amostral é $S = \{defeituoso, \text{não } defeituoso\}$.*

Exemplo 3.3. *Num experimento para contar o número de pessoas com diabetes na cidade de São Paulo (n habitantes), obtemos como espaço amostral $S = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}$.*

Definição 3.4. *Um EVENTO é um subconjunto do espaço amostral.*

Observação 3.5. *O próprio espaço amostral é um evento, também conhecido como evento certo, enquanto que o evento incerto é denominado de evento vazio e denotado por $\emptyset$. Os eventos serão denotados por letras maiúsculas. Observe tamém que o conjunto de todos os eventos é o conjunto das partes do espaço amostral.*

Exemplo 3.6. *Considerando agora o experimento do Exemplo 3.2 podemos definir como eventos $D = \{defeituoso\}, E = \{\text{não } defeituoso\}$.*

Exemplo 3.7. *Já referente ao Exemplo 3.3, ao contarmos o número de pessoas com diabetes, podemos associar eventos como: A: entre 15 e 20 pessoas com diabetes, como sendo $A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ ou o evento F: nenhuma pessoa, como sendo $F = \{0\}$.*

3.1.2 Definição de Probabilidade e Propriedades

A probabilidade é o ato de atribuirmos pesos aos eventos. Entretanto, para que cada um não defina probabilidade de sua forma, vamos exigir que esta função peso tenha algumas propriedades.

Definição 3.8. *Uma função probabilidade, que denotaremos por* $\mathbb{P}$*, é uma função que tem domínio no conjunto de eventos e tem como imagem valores numéricos (pesos) entre 0 e 1. Além disso, a probabilidade deve satisfazer os seguintes axiomas:*

1. $\mathbb{P}(S) = 1$ *e* $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$*;*

2. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$*, para todo evento* A*;*

3. *Para qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos* $A_1, A_2, \cdots, A_n$*, isto é, eventos para os quais* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *quando* $i \neq j$*, temos que:*

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Qualquer função $\mathbb{P}$ que atribua pesos a eventos associados a um espaço amostral e que satisfaça as propriedades (1), (2) e (3) acima será denominada função de probabilidade, com $\mathbb{P}(A)$ sendo a probabilidade de ocorrer o evento A.

Exemplo 3.9. *Quando lançamos uma moeda não hesitamos em associar probabilidade* $1/2$ *para o evento "cara"e também* $1/2$ *para o evento "coroa". Da mesma forma, quando lançamos uma moeda n vezes todos os* 2^n *possíveis resultados deste experimento tem a mesma probabilidade.*

A seguir, apresentamos algumas propriedades elementares da probabilidade que são obtidas diretamente da definição.

Proposição 3.10. *Se* A^c *for o evento complementar de* A*, então* $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$*.*

Demonstração. De fato, sendo Ω o espaço amostral, temos que $\Omega = A \cup A^c$, onde esta união é disjunta, uma vez que $A \cap A^c = \emptyset$. Utilizando o axioma 3 da definição de probabilidade temos que:

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \tag{3.1}$$

de onde segue,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c). \tag{3.2}$$

$\square$

Proposição 3.11. *A probabilidade da união de dois eventos A e B é calculada como*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \tag{3.3}$$

Demonstração. Temos que $A \cup B = A \cup (B - A)$ e $A \cap (B - A) = \emptyset$. Portanto,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A). \tag{3.4}$$

Também temos que $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ e $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$. Então

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B - A) + \mathbb{P}(A \cap B). \tag{3.5}$$

Então, combinando (3.3) e (3.4), temos que: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. $\square$

Proposição 3.12. *Se $A \subset B$, então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

Demonstração. De fato, temos que, se $A \subset B$, então $B = A \cup (B - A)$, sendo que esta união é disjunta. Portanto, utilizando o axioma 3 da definição de probabilidade, segue que:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A). \tag{3.6}$$

Como $\mathbb{P}(B - A) \geq 0$, temos então que $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$. $\square$

3.1.3 Eventos Equiprováveis

Considere um experimento tem como espaço amostral, com um número finito de elementos:

$$\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}. \tag{3.7}$$

Dizemos que os eventos unitários $\{e_i\}$ são equiprováveis, se todos tem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é, para todo $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbb{P}(\{e_i\}) = \frac{1}{n}. \tag{3.8}$$

Desta forma, podemos definir a probabilidade de um evento $E = \{e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}\}$, composto por k elementos (com $k \leq n$), como sendo:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } E}{\text{número de casos possíveis de } S} = \frac{k}{n}. \tag{3.9}$$

Exemplo 3.13. *No lançamento de um dado honesto (não viciado), os elementos do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ são equiprováveis, pois cada elemento do espaço amostral tem a mesma chance de ocorrer, ou seja, a chance de sair 1 é a mesma de sair 2, que é a mesma de sair 3, e assim por diante. Portanto,*

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}. \tag{3.10}$$

Com isso e da propriedade (3) de probabilidade, temos que, se A é o evento sair número par no lançamento de um dado honesto, então:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6) = \mathbb{P}(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \tag{3.11}$$

Com isso, obtemos que a probabilidade de ocorrer o evento A é igual ao número de elementos favoráveis a $A = \{2, 4, 6\}$, que é 3 (pois A tem 3 elementos), dividido pelo número de elementos no espaço amostral Ω, que é 6.

3.1.4 Eventos Independentes e Probabilidade Condicional

Outro conceito importante da teoria de probabilidade é o de independência entre dois eventos. Na prática, dois eventos são independentes quando a ocorrência de um evento não influência a ocorrência do outro evento. Do ponto de vista probabilístico temos a seguinte definição:

Definição 3.14. *Dois eventos A e B são ditos independentes se:*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \tag{3.12}$$

Proposição 3.15. *Um evento A é independente dele mesmo se, e só se, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.*

Demonstração. Para provar a ida desta proposição, defina $\mathbb{P}(A) = a$ e suponha que A seja independente de si mesmo, portanto $a^2 =$

$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) = a$, ou seja, $a^2 = a$ mas isto é válido se, e somente se, $a = 0$ ou $a = 1$.

Por outro lado se $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$ é fácil ver que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(A)$. □

Exemplo 3.16. *Um lote contém 10 peças, sendo 7 boas (B) e 3 defeituosas (D). Retiramos duas peças, ao acaso e com reposição (isto é, após retirarmos a primeira peça esta é colocada novamente no lote para que possamos efetuar a segunda retirada), para inspeção. Qual a probabilidade de se obter duas peças defeituosas?*

O experimento de realizar a primeira retirada tem como espaço amostral $\Omega_1 = \{D_1, B_1\}$ e a segunda retirada tem como espaço amostral $\Omega_2 = \{D_2, B_2\}$, em que D_i significa que retiramos uma peça defeituosa na i-ésima retirada e B_i significa que retiramos uma peça boa na i-ésima retirada, para $i \in \{1, 2\}$. Logo como probabilidade dos elementos de Ω, temos que:

$$\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = \tfrac{3}{10} \text{ e } \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \tfrac{7}{10}.$$

Associamos ao experimento de retirar duas peças ao acaso e com reposição o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = \{(D_1, B_2); (B_1, D_2); (D_1, D_2); (B_1, B_2)\}. \tag{3.13}$$

Queremos encontrar a probabilidade de se obter duas peças defeituosas, ou seja, a probabilidade das peças na primeira retirada e na segunda retirada serem defeituosas. Assim, desde que a primeira e a segunda retirada sejam executadas de forma independente, temos que:

$$\mathbb{P}((D_1, D_2)) = \mathbb{P}(D_1 \cap D_2) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(D_2) = \frac{3}{10}.\frac{3}{10} = \frac{9}{100}. \tag{3.14}$$

Vamos examinar melhor a diferença entre extrair uma peça de um lote, ao acaso, com ou sem reposição. Como vimos neste exemplo, se a retirada for feita com reposição, então:

$$\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = \tfrac{3}{10} \text{ e } \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \tfrac{7}{10}.$$

Pois cada vez que extraímos peças do lote, sempre existirão 3 peças defeituosas e 7 peças boas num total de 10. No entanto, se estivermos extraindo sem reposição, o resultado é diferente. É ainda verdade, naturalmente, que:

$$\mathbb{P}(D_1) = \tfrac{3}{10} \text{ e } \mathbb{P}(B_1) = \tfrac{7}{10}.$$

Mas as probabilidades de sair uma peça defeituosa ou de sair uma peça boa na segunda retirada não serão as mesmas. Para calcularmos essas probabilidades devemos conhecer a composição do lote no momento de se extrair a segunda peça. Por exemplo, para calcularmos a probabilidade de extrairmos uma peça defeituosa na segunda retirada, D_2, temos que saber se ocorreu D_1 ou B_1. Caso tenha ocorrido D_1,

$$\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{9} \tag{3.15}$$

e, se ocorreu B_1,

$$\mathbb{P}(D_2) = \frac{3}{9}. \tag{3.16}$$

Este exemplo (sem reposição) tem como resultado:

$$\mathbb{P}(\text{duas defeituosas}) = \frac{3}{10}.\frac{2}{9} = \frac{1}{15}. \tag{3.17}$$

Porém, para facilitar a analise temos a necessidade de introduzirmos a definição de Probabilidade Condicional.

Definição 3.17. *A probabilidade de ocorrer um evento A dado que ocorreu um evento B ($\mathbb{P}(B) > 0$) é dada por:*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{3.18}$$

Dessa relação sai a **Regra do Produto** que é dada no teorema a seguir.

Teorema 3.18. *Considere um conjunto finito de eventos $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ tais que os eventos condicionais $A_i|A_1 \cap A_2 \cap \cdots, A_{i-1}$ tenham probabilidades positivas. Então temos que:*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i). \tag{3.19}$$

Demonstração. Para demonstrar este teorema escrevemos:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(A_1).\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}.\cdots.\frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)}{\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}. \tag{3.20}$$

e usando a definição de probabilidade condicional, podemos reescrever o lado direito da igualdade acima como:

$$\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i). \tag{3.21}$$

□

Observação 3.19. *No caso em que temos dois eventos A e B, concluímos que a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos A e B é igual a probabilidade de ocorrência do evento A (ou B) vezes a probabilidade de ocorrência do evento A (ou B) dado que ocorreu o evento B (ou A), ou seja:*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A|B). \tag{3.22}$$

Fato que vêm da definição 3.15.

Teorema 3.20 (Teorema da probabilidade total)**.** *Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ eventos dois a dois disjuntos que formam uma partição do espaço amostral, isto é:*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \tag{3.23}$$

e assuma que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Então, para qualquer evento B, temos que:

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B) = \\ \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n) = \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).\end{gathered}$$

Demonstração. Para demonstrarmos esse teorema basta observarmos que como a sequência $A_1, A_2, \cdots, A_n$ formam uma partição de Ω, logo, temos que:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B = B. \tag{3.24}$$

E como os A_i são disjuntos dois a dois temos que $B \cap A_i$ também são disjuntos e pelo axioma 3 e pelo Teorema 3.18 temos que:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i). \tag{3.25}$$

$\square$

Exemplo 3.21. *Suponha que um jogador participa de um torneio de xadrez onde sua probabilidade de vitória é* $0,3$ *contra metade dos jogadores (chame-os do tipo 1),* $0,4$ *contra um quarto dos jogadores (chame-os do tipo 2) e* $0,5$ *contra o um quarto dos jogadores restantes (chame-os do tipo 3). O jogador disputa uma partida contra um oponente selecionado aleatoriamente. Qual é a probabilidade dele vencer?*

Seja A_i o evento de jogar com um oponente do tipo i. Temos então que:

$\mathbb{P}(A_1) = 0,5;$ $\quad\mathbb{P}(A_2) = 0,25;$ $\quad\mathbb{P}(A_3) = 0,25$

Seja B o evento vitória. Então temos:

$\mathbb{P}(B|A_1) = 0,3;$ $\quad\mathbb{P}(B|A_2) = 0,4;$ $\quad\mathbb{P}(B|A_3) = 0,5$

Assim, pelo teorema da probabilidade total, a probabilidade de vitória é:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B|A_3)$$
$$\mathbb{P}(B) = 0,5.0,3 + 0,25.0,4 + 0,25.0,5 = 0,375 = 37,5\%.$$

O teorema da probabilidade total com frequência é usado em conjunto com o seguinte teorema, chamado de Teorema de Bayes, que relaciona probabilidades condicionais da forma $\mathbb{P}(A|B)$ com probabilidades condicionais da forma $\mathbb{P}(B|A)$, em que a ordem da condicionalidade é reversa.

Teorema 3.22 (Teorema de Bayes)**.** *Sejam* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *eventos que formam uma partição do espaço amostral, e assuma que* $\mathbb{P}(A_i) > 0$ *para todo* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$*. Então, para qualquer evento* B *tal que* $\mathbb{P}(B) > 0$*, temos que:*

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)}. \tag{3.26}$$

Demonstração. Para verificar o teorema de Bayes, basta notar que utilizando (3.25) $\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_i|B)$ já que ambos são iguais a $\mathbb{P}(A_i \cap B)$, o que garante a primeira igualdade. A segunda igualdade segue da aplicação do teorema da probabilidade total para B. □

3.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MONTY HALL UTILIZANDO A TEORIA DAS PROBABILIDADES

3.2.1 Solução pela Definição

Nesta seção iremos abordar a solução (ou comprovação) do Problema de Monty Hall utilizando a definição de probabilidade, conforme algumas das definição abordadas no capítulo anterior.

Inicialmente, chamaremos de S o conjunto de todas as possibilidades no jogo de Monty-Hall e estabeleceremos o padrão de cada elemento $s \in S$ como sendo:

$$s = (\text{PORTA ESCOLHIDA, PORTA DO PRÊMIO, PORTA ABERTA, TROCOU DE PORTA}).$$

As portas serão enumeradas de 1 até 3, enquanto as possíveis respostas para saber se o candidato trocou ou não de porta, serão S (sim) e N (não). Por exemplo o elemento $(1, 1, 2, N)$ do espaço amostral significa que o candidato escolheu a porta 1, esta era a porta do prêmio, o apresentador abriu a porta 2 e o candidato não trocou de porta. Portanto, neste padrão. Segue o espaço amostral S:

$$S = \{(1,1,2,S),(1,1,3,S),(1,1,2,N),(1,1,3,N),(1,2,3,S),\\ (1,2,3,N)(1,3,2,S),(1,3,2,N),(2,2,1,S),(2,2,3,S),(2,2,1,N),\\ (2,2,3,N),(2,1,3,S),(2,1,3,N),(2,3,1,S),(2,3,1,N),(3,3,1,S),\\ (3,3,2,S),(3,3,1,N),(3,3,2,N),(3,1,2,S),(3,1,2,N),(3,2,1,S),\\ (3,2,1,N)\}.$$

São, ao todo, 24 possibilidades de jogos no Programa de Monty Hall, pois são $3.2.2 = 12$ possibilidade com o participante escolhendo a porta premiada, mais $3.2.1.2 = 12$ possibilidades com o participante não escolhendo a porta premiada. Agora um próximo passo é definir a probabilidade de cada elemento s do espaço amostral S, da seguinte forma:

No jogo de Monty Hall as situações: Escolher a porta, Porta do Prêmio, Porta Aberta, Se trocou de porta, são totalmente independentes. Já vimos anteriormente que se A e B são eventos independentes temos que $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, então, por exemplo:

No item $P(s_{14}) = P(2, 1, 3, N)$ temos que o participante escolheu a porta 2 e esta não era a porta do prêmio (que foi 1, no caso), dando apenas uma opção para Monty Hall abrir a porta (pois ele não pode abrir a que está o prêmio nem a que o candidato escolheu). Assim:

a) Escolha da porta: 1 possibilidade em 3, ou seja, $\frac{1}{3}$.
b) Porta do Prêmio: 1 possibilidade em 3, ou seja, $\frac{1}{3}$.
c) Porta Aberta: 1 possibilidade.
d) Trocou de Porta: 1 possibilidade em 2 (S ou N), ou seja, $\frac{1}{2}$.

Logo: $P(s_{14}) = P(2, 1, 3, N) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{18}$.

No outro caso vejamos o item $P(s_9) = P(2, 2, 1, S)$, onde o participante escolheu a porta premiada. Logo abre a possibilidade de escolha para a porta aberta por Monty Hall. Assim sendo:

a) Escolha da porta: 1 possibilidade em 3, ou seja, $\frac{1}{3}$.
b) Porta do Prêmio: 1 possibilidade em 3, ou seja, $\frac{1}{3}$.
c) Porta Aberta: 1 possibilidade em 2, ou seja, $\frac{1}{2}$.
d) Trocou de Porta: 1 possibilidade em 2 (S ou N), ou seja, $\frac{1}{2}$.

Logo: $P(s_9) = P(2, 2, 1, S) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{36}$.
Assim,

- $P(s_1) = P(1, 1, 2, S) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_2) = P(1, 1, 3, S) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_3) = P(1, 1, 2, N) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_4) = P(1, 1, 3, N) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_5) = P(1, 2, 3, S) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_6) = P(1, 2, 3, N) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_7) = P(1, 3, 2, S) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_8) = P(1, 3, 2, N) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_9) = P(2, 2, 1, S) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_{10}) = P(2, 2, 3, S) = \frac{1}{36}$;

- $P(s_{11}) = P(2, 2, 1, N) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_{12}) = P(2, 2, 3, N) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_{13}) = P(2, 1, 3, S) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_{14}) = P(2, 1, 3, N) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_{15}) = P(2, 3, 1, S) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_{16}) = P(2, 3, 1, N) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_{17}) = P(3, 3, 1, S) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_{18}) = P(3, 3, 2, S) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_{19}) = P(3, 3, 1, N) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_{20}) = P(3, 3, 2, N) = \frac{1}{36}$;
- $P(s_{21}) = P(3, 1, 2, S) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_{22}) = P(3, 1, 2, N) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_{23}) = P(3, 2, 1, S) = \frac{1}{18}$;
- $P(s_{24}) = P(3, 2, 1, N) = \frac{1}{18}$.

O próximo passo é verificar qual é a probabilidade de um jogador ganhar.

Vamos definir então o evento G, que será o evento “GANHOU”:

$$\begin{gathered} G = \{(1, 1, 2, N), (1, 1, 3, N), (1, 2, 3, S), (1, 3, 2, S), \\ (2, 2, 1, N), (2, 2, 3, N), (2, 1, 3, S), (2, 3, 1, S), \\ (3, 3, 1, N), (3, 3, 2, N), (3, 1, 2, S), (3, 2, 1, S)\}. \end{gathered}$$

Utilizando as probabilidades de cada elemento,e o item 3 da definição de probabilidade, vem que:

$$\begin{gathered} P(G) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \\ + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \\ + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2}. \end{gathered}$$

Resultado este, que nos mostra que a probabilidade de ganhar no jogo de Monty Hall é de 50%. Porém, nosso objetivo é mostrar que a chance de vencer o jogo aumenta com a troca de porta. Logo, agora temos que conhecer o evento T, que será o evento “TROCOU”:

$$T = \{(1,1,2,S),(1,1,3,S),(1,2,3,S),(1,3,2,S),$$
$$(2,2,1,S),(2,2,3,S),(2,1,3,S),(2,3,1,S),$$
$$(3,3,1,S),(3,3,2,S),(3,1,2,S),(3,2,1,S)\}.$$

Novamente, utilizando a probabilidade de cada elemento:

$$P(T) = \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{18} +$$
$$+\tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{18} +$$
$$+\tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{2}.$$

E, para utilizar a definição de probabilidade condicional, definimos, por fim o evento $G \cap T$, "TROCA DE PORTA E GANHAR":

$$G \cap T =$$
$$\{(1,2,3,S),(1,3,2,S),(2,1,3,S),(2,3,1,S),(3,1,2,S),(3,2,1,S)\},$$

onde:

$$P(G \cap T) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3}.$$

Comprovamos assim, por meio da definição de probabilidade condicional, que a discussão iniciada por Marilyn Vos Savant tem realmente fundamento. A chance que outrora era de $\frac{1}{2}$ ou seja 50% de chance de vitória, aumenta ao trocar-se de porta, já que,

$$P(G \mid T) = \frac{P(G \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

O que, obviamente, traduz o aumento da chance de vencer, e ainda $P(\text{Ganhar sem troca}) = P(G \mid T)^C = \frac{1}{3}$.

3.2.2 Solução pelo Teorema de Bayes

Após resolver o problema utilizando a definição de probabilidade, podemos avançar nossa analise buscando resolver o mesmo problema sob a ótica do Teorema de Bayes. Desta forma, tratando de um assunto que está contido no currículo do Ensino Médio e que não é abordado por ser muito "abstrato". Procuraremos, outrossim, nos restringir a resposta direta ao problema, para que o tema não se torne demasiadamente complexo.

Inicialmente devemos supor na resolução deste problema que o candidato prefere ganhar o carro, obviamente.

Como já citado neste trabalho, este inocente problema já causou muitas controvérsias até mesmo no âmbito dos matemáticos profissionais. Segundo Mlodinow (2011), um matemático da Universidade George Mason escreveu a Marilyn Vos Savant: *Você errou feio! Deixe-me explicar: se mostrarmos que uma das portas não contém o prêmio, essa informação altera a probabilidade das duas escolhas remanescentes para 1/2, e nenhuma das duas apresenta motivos para ter probabilidade maior que a outra. Como matemático profissional, estou muito preocupado com a falta de conhecimentos matemáticos do público em geral. Por favor, ajude a melhorar essa situação confessando o seu erro e sendo mais cuidadosa no futuro?.*

Portanto, como até matemáticos profissionais já se equivocaram neste problema, é de extrema importância que o enunciado esteja bem entendido. O apresentador não abre a porta de forma aleatória. Com o conhecimento prévio do que está por trás de cada porta, ele sempre revelará um dos dois bodes.

O cálculo da probabilidade de ganhar o carro mudando ou não de porta pode ser resolvido de forma simples. Suponha, sem perda de generalidade, que o participante tenha inicialmente escolhido a porta 1, e que a distribuição dos bodes e do carro seja feita, em cada caso, de forma aleatória. Lembremos que o questionamento feito ao participante é se ele deseja ou não mudar de porta após um bode ser revelado.

Quando o participante não muda de porta, a probabilidade dele ganhar o carro é 1/3, porém fazendo a mudança no momento oportuno a probabilidade de vitória passa a ser de 2/3. Isso se dá pelo fato de que se não houver a mudança da porta escolhida, a única forma do participante ganhar o carro é ele ter escolhido a porta correta na primeira tentativa. Como a probabilidade de o prêmio estar nas duas portas não escolhias é 2/3, ao trocar de porta ele aproveita o fato de que das duas portas restantes, uma é desvendada.

Vamos agora provar este problema usando o Teorema de Bayes. Sem perda de generalidade, vamos definir como:

1. a porta escolhida pelo expectador de 1;

2. a porta aberta pelo apresentador de 2,

3. a terceira porta de 3.

Detonamos também os eventos

1. A, B e C para representarem, respectivamente, o prêmio por trás das portas, 1, 2 e 3;

2. X o evento que é a abertura da porta 2 pelo apresentador.

O problema consiste em saber se a afirmação de que P$(A|X)$ e P$(C|X)$ são iguais está correta. Em outras palavras, a dúvida é se a probabilidade independe da mudança de porta pelo participante. Pelo Teorema de Bayes temos que:

$$\mathbb{P}(A|X) = \frac{\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(X|A)}{\mathbb{P}(X)} \tag{3.27}$$

e

$$\mathbb{P}(C|X) = \frac{\mathbb{P}(C).\mathbb{P}(X|C)}{\mathbb{P}(X)}. \tag{3.28}$$

De acordo com o problema, temos que P(A) = P(B) = P(C) = 1/3. Usando probabilidade condicional, podemos concluir que:

1. $P(X|A) = 1/2$, se atrás da porta 1, escolhida pelo expectador, tiver um carro, pois o apresentador pode escolher para abrir as portas 2 ou 3. Portanto, um caso favorável dentre dois possíveis;

2. $P(X|B) = 0$, se atrás da porta 2 tiver um carro, pois o apresentador não pode escolher a porta 2;

3. $P(X|C) = 1$, se atrás da porta 3 tiver um carro, pois o apresentador só pode escolher a porta 2.

Antes de calcularmos P(X), note que:

$$X = (X \cap A) \cup (X \cap B) \cup (X \cap C) \tag{3.29}$$

e ainda que $(X \cap A), (X \cap B), (X \cap C)$ são mutuamente exclusivos, desta forma, utilizando o Teorema (3.20):
$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(X \cap A) + \mathbb{P}(X \cap B) + \mathbb{P}(X \cap C)$
$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(X|A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(X|B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(X|C)$
$\mathbb{P}(X) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{3}.1$
$\mathbb{P}(X) = \frac{1}{2}$.
Portanto, utilizando o Teorema de Bayes segue que:

$$\mathbb{P}(A|X) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(X|A)}{\mathbb{P}(X)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \tag{3.30}$$

e também,

$$\mathbb{P}(C|X) = \frac{\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(X|C)}{\mathbb{P}(X)} = \frac{\frac{1}{3}.1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}. \tag{3.31}$$

Concluímos, então, que se mudarmos de porta, dobramos as chances de ganhar o prêmio.

Fica evidenciado também, que o caso modelado acima, também pode ser visto pela ótica das funções de probabilidade vistas na subsecção 3.2.1. Definimos os eventos envolvidos, a partir do espaço amostral S visto anteriormente:

$$\begin{aligned}
A = \{&(1,1,2,S),(1,1,3,S),(1,1,2,N),(1,1,3,N),\\
&(2,1,3,S),(2,1,3,N),(3,1,2,S),(3,1,2,N)\},\\
B = \{&(2,2,1,S),(2,2,3,S),(2,2,1,N),(2,2,3,N),\\
&(1,2,3,S),(1,2,3,N),(3,2,1,S),(3,2,1,N)\},\\
C = \{&(3,3,2,S),(3,3,1,S),(3,3,2,N),(3,3,1,N)\\
&(2,3,1,S),(2,3,1,N),(1,3,2,S),(1,3,2,N)\}.
\end{aligned}$$

Nota-se também, que inicialmente:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}.$$

Agora, definiremos:
$X = \{(1,1,2,S),(1,1,2,N),(1,3,2,S),(1,3,2,N),(3,3,2,S),$ $(3,3,2,N),(3,1,2,S),(3,1,2,N)\}$, e podemos calcular as probabilidades acima como fizemos na seção 3.2.1.

$$\begin{gathered}
P(X) = P(A).P(X|A) + P(B).P(X|B).P(C).P(X|C) = \\
\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{2} + 0 + \tfrac{1}{3}.1 = \tfrac{1}{2}.
\end{gathered}$$

O que comprova os resultados desta solução, através do Espaço amostral S.

Observação 3.23. *Muitos matemáticos somente se convenceram quando realizaram diversas e diversas simulações em computador, de tal forma que verificaram que a probabilidade de ganhar o carro trocando de porta era 2/3. Este será o objeto de estudo do próximo capítulo.*

4 SIMULAÇÃO

4.1 MODELO: PROBLEMA DE MONTY HALL

Para conseguir implementar um método que possibilitasse a experimentação do Problema de Monty Hall em sala de aula, recorremos a um método semelhante ao Processo de Simulação de Monte Carlo, onde, por meio de algoritmos gerados por Softwares computacionais gera-se exaustivamente resultados dos experimentos para que possamos assim, atribuir a um resultado a tendência dos dados encontrados como resposta em um número muito grande de simulações. Para entender a comparação citamos o que (ANDRADE, 2009), coloca: *"A simulação de Monte Carlo trabalha a partir da geração artifícial de valores das variáveis de interesse, tendo como auxílio números aleatórios gerados por um Software Computacional. A partir daí, os valores encontrados na maioria das tentativas são utilizados como verdade"*.

Nosso programa foi criado utilizando-se o Software Excel (que é bastante acessível nas escolas públicas) para rodar inúmeras vezes, neste caso 5000 (cinco mil) situações de escolha aleatória por parte do participante e da porta a ser aberta pelo apresentador, sendo 10 (dez) simulações com 500 (quinhentos) jogos cada.

Figura 4 – Fórmulas Utilizadas

	A	B	C
1			
2		Opções	Simulações
3		Porta Premiada	INT(ALEATÓRIO()*3)
4		Porta Escolhida	INT(ALEATÓRIO()*3)
5		Porta a Direita da Escolhida	MOD(C4+1;3)
6		Porta a Esquerda da Escolhida	MOD(C4-1;3)
7		Porta não Premiada (1)	SE(C5<>C3;C5;C6)
8		Porta não premiada (2)	SE(C6<>C3;C6;C5)
9		Porta Aberta pelo Apresentador	SE(ALEATÓRIO()>0;C7;C8)
10		Porta Escolhida foi aberta?	SE(C4=C9;1;0)
11		O candidato não trocou de porta	SE(C3=C4;1;0)
12		O candidato Trocou de porta	SE(MOD(3-C4-C9;3)=C3;1;0)

FONTE: O autor.

Para entender como funciona do processo, iremos comentar as fórmulas mostradas no quadro acima:

- =INT(ALEATORIO()*3): Retorna um valor inteiro não negativo menor que três. Estes valores 0, 1 e 2, que representarão as portas.

- =MOD(C4±1;3): Retorna o resto da divisão do valor da porta escolhida. Assim sendo, temos as portas adjacentes a ela.

- =SE(C5<>C3;C5;C6) ou =SE(C6<>C3;C6;C5): Se a porta a esquerda (ou direita) da escolhida não for a premiada, deve ser aberta por Monty-Hall.

- =SE(ALEATORIO()>0;C7;C8): Se o valor aleatorio for maior que "zero"(e será) escolherá um valor não premiado.

- =SE(C4=C9;1;0): É um teste para verificar se a porta aberta por Monty-Hall não é a premiada, o resultado deve ser sempre "zero".

- =SE(C3=C4;1;0): Se a porta escolhida for a porta premiada, o candidato ganha se não trocar de porta.

- =SE(MOD(3-C4-C9;3)=C3;1;0): Retorna as portas a esquerda (ou direita) da escolhida inicialmente, através do resto da divisão por 3. Se este valor for igual a porta premiada, o candidato ganhará se trocar de porta.

Baseado nestas fórmulas são obtidos resultados, cujos fatores mais importantes são os das duas últimas linhas, pois indicam se o candidato ganha trocando de porta ou não (1 para sim/0 para não). A Figura 5 mostra os resultados obtidos nos 15 primeiros jogos simulados:

Figura 5 – Resultados obtidos em 15 simulações

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1			Quantidade de Jogos														
2		Opções	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3		Porta Premiada	1	0	0	0	1	1	2	1	1	0	1	1	1	2	2
4		Porta Escolhida	1	1	2	1	1	2	1	1	0	2	0	1	1	2	1
5		Porta a Direita da Escolhida	2	2	0	2	2	0	2	2	1	0	1	2	2	0	2
6		Porta a Esquerda da Escolhida	0	0	1	0	0	1	0	0	2	1	2	0	0	1	0
7		Porta não Premiada (1)	2	2	1	2	2	0	0	2	2	1	2	2	2	0	0
8		Porta não premiada (2)	0	2	1	2	0	0	0	0	2	1	2	0	0	1	0
9		Porta Aberta pelo Apresentador	0	2	1	2	0	0	0	0	2	1	2	0	0	1	0
10	teste	Porta Escolhida foi aberta?	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11		O candidato não trocou de porta	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
12		O candidato Trocou de porta	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1

FONTE: O autor.

Para compreender melhor a Figura 5, temos que:

- "O candidato não trocou de porta?"tem valor 1 se ele ganhou com esta estratégia e 0 se ele não ganhou com essa estratégia;

- "O candidato trocou de porta?"tem valor 1 se ele ganhou com esta estratégia e 0 se ele não ganhou com essa estratégia.

Como exemplo, após executar 10 simulações, cada uma delas com 500 jogos, chegou-se aos seguintes resultados, conforme Figura 6:

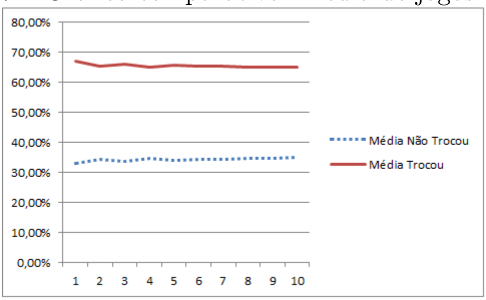
Figura 6 – Dez simulações: 500 jogos cada

SIMULAÇÃO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Não Trocou	145	165	158	153	152	185	182	157	172	169
Trocou	324	318	311	317	324	304	300	324	300	298
% Acerto Não Trocou	30,92%	34,16%	33,69%	32,55%	31,93%	37,83%	37,76%	32,64%	36,44%	36,19%
% Acerto Trocou	69,08%	65,84%	66,31%	67,45%	68,07%	62,17%	62,24%	67,36%	63,56%	63,81%
Média Não Trocou	30,92%	32,54%	32,92%	32,83%	32,65%	33,51%	34,12%	33,94%	34,21%	34,41%
Média Trocou	69,08%	67,46%	67,08%	67,17%	67,35%	66,49%	65,88%	66,06%	65,79%	65,59%

FONTE: O autor.

Nesta figura, verificamos a quantidade de jogos ganhos trocando ou não de porta nas duas primeiras linhas. Fica evidenciado que em cada um dos 10 grupos de jogos (com 500 cada) cerca de 66% (em média) vence trocando de porta e 33% (em média) não trocando de porta. Para ficar mais claro a analise dos resultados, a partir da figura 6, faz-se o gráfico das médias das quantidades de acontecimentos (jogos vencidos ou não) para verificar qual o qual a tendência de cada caso, conforme a figura 7:

Figura 7 – Gráfico comparativo: Média de jogos vencidos



FONTE: O autor.

Portanto, assim com os resultados obtidos na Figura 6 e Figura 7, comprovamos, até mesmo para os mais céticos que o percentual de acerto com a mudança da estratégia, ou seja, a mudança de porta, após o apresentador abrir uma delas é maior do que permanecer na escolha inicial.

5 APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentaremos um plano de aula onde será trazido uma alternativa para a introdução do conteúdo de Probabilidade Condicional para turmas do 2º ano do Ensino Médio. Utilizaremos o Problema de Monty Hall como fator instigante para o aprendizado da matéria.

5.1 INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA PROBABILIDADE CONDICIONAL NO ENSINO MÉDIO

5.1.1 Objetivos

- Desenvolver os conceitos de Probabilidade Condicional a partir da Problemática de Monty Hall.
- Fazer com que os alunos aceitem a ideia de Probabilidade Condicional com estudos práticos.

5.1.2 Recursos

- Caixas de Fósforo vazias
- Bolinha de Papel
- Caderno e Caneta
- Computador com Software Excel
- Quadro Negro e Giz

5.1.3 Duração

- Quatro a cinco aulas

5.1.4 Metodologia

- Primeiro Momento - Aula 1

- Contar e demonstrar a história do problema ao quadro para estimular a dúvida dos alunos;
- Solicitar aos alunos que se sentem em duplas;
- Um dos alunos deverá realizar o papel do apresentador e outro do expectador;
- Com o aluno (expectador) não vendo a porta (caixa de fósforos) escolhida pelo colega, simular o resultado de 20 jogos. Dez deles trocando e outros 10 não trocando de porta. Anotar os resultados no caderno;
- Tomar os resultados de todas as duplas da sala de aula e verificar a média dos resultados positivos trocando e não trocando de porta.

• Segundo Momento - Aula 2

- Definir formalmente Probabilidade Condicional, estimulando os alunos a resolver o problema da aula passada;
- Formar o Espaço Amostral de todas as possibilidades existentes no jogo (conforme trabalho).
- Calcular a Probabilidade Condicional $P(G|T)$, ganhou trocando de porta, e verificar o resultado.

• Terceiro Momento - Aula 3

- Definir formalmente o Teorema de Bayes, estimulando os alunos a resolver o problema de uma outra maneira;
- Debater os resultados (e comprovar utilizando Probabilidade Condicional, se necessário) das probabilidades $P(X|A)$, $P(X|B)$ e $P(X|A)$;
- Definir a probabilidade do Evento X, abertura da porta 2 pelo apresentador;
- Resolver o problema utilizando o Teorema de Bayes.

• Quatro Momento - Aula 4

- No Laboratório de Informática, desenvolver a utilização de algumas funções básicas do Excel;
- Implementar o modelo de simulação descritos neste trabalho;
- Realizar 10 simulações do jogo com 500 tentativas cada;
- Calcular a média dos resultados da simulação, para comprovação na prática dos resultados, provados anteriormente com cálculos.

6 CONCLUSÃO

A matemática no Ensino Médio vem se tornando cada vez mais uma disciplina onde se abordam menos conceitos, e cada vez esta abordagem se torna mais superficial. Sendo a Teoria das Probabilidades e, em particular a Probabilidade Condicional, parte importante e esquecida desta disciplina, faz-se necessário uma abordagem que permita a professores e alunos um processo de ensino e aprendizagem mais eficaz. Nesta visão, com este trabalho, explicamos o Problema de Monty Hall sob duas concepções, a perspectiva matematicamente pura e a perspectiva prática do processo de tentativa, com auxílio da ferramenta computacional. Desta forma, cria-se uma oportunidade de abordagem do ensino da Teoria das Probabilidades que visa instigar o aluno a comprovar não apenas numericamente resultados, que já citado, gera polêmicas, mas também sob um olhar que faz com que o assunto não crie desconfianças.

Numa outra análise, temos o problema de Monty Hall como fator que permite instigar o aluno a querer aprender Probabilidade, pois ele é um exemplo onde se envolve probabilidade e que a intuição acaba levando a um resultado errado. Isso porque, ao responder esse problema de maneira intuitiva, é natural pensar que, no momento em que a escolha é feita entre duas portas, a probabilidade de ganhar o prêmio passa de $1/3$ para $1/2$.

Por fim, neste trabalho, mostramos que, ao explorar e interpretar várias nuances desse problema, usando uma abordagem correta, estes empecilhos (falta de interesse dos alunos, contradições) são esclarecidas, comprovando-se que realmente o problema pode ser explicado de maneira teórica e prática, justificando ainda que a troca de porta leva ao aumento da chance de ganhar para $2/3$ e, ainda mais, podemos introduzir um conteúdo um tanto complexo aos alunos de uma forma que os leve ao entendimento e comprovação dos resultados, objetivo, muitas vezes não alcançado nas salas de aula.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, E. L. *Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e Modelos para Analise de Decisões.* 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

DANTAS, C.A.B. *Probabilidade: um curso introdutório.* São Paulo: Editora da USP, 2004.

MLODINOW, L., *O Andar do Bêbado.* Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed, 2009.

MORGADO, A.C.O; CARVALHO, J.B.P.;FERNANDEZ, P. *Analise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

SILVER, N. *O Sinal e o Ruído: Porque tantas previsões falham e outras não.* Rio de Janeiro: Intrínseca, 2013.

TAHA, H. A. *Pesquisa Operacional.* São Paulo: Pearson, 2008.

TALEB, N. N. *Iludido pelo Acaso ? A Influência Oculta da Sorte nos Mercados e na Vida.* São Paulo: Editora Record, 2004.

WECHSLER, S. *Exchangeability and Predictivism.* Erkenntnis. 1993.

http://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/2012/10/08/quien-es-monty-hall-un-dos-tres-responda-otra-vez/. Acesso em: 01 de junho de 2015.

http://blogdoechevarria.blogspot.com.br/2008/04/o-problema-de-monty-hall.html. Acesso em: 01 de junho de 2015.

http://www.openlibrary.org/books/OL1721824M/AskMarilyn. Acesso em: 01 de junho de 2015.